

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИРКУЛЕЙ

Е. И. ТОРОПЫГИН

(Представлено проф. докт. техн. наук П. М. Алабужевым)

Приборы для вычерчивания эллипсов можно разделить на два основных типа:

1. Плоские приборы.
2. Приборы циркульного типа (эллиптические циркули).

Первые приборы отличаются своей громоздкостью и сравнительной сложностью, но зато от них легче можно перейти к приборам более сложным, позволяющим строить, например, аксонометрию, перспективу, тени и т. д.

Эллиптические циркули отличаются малогабаритностью, компактностью и простотой в обращении.

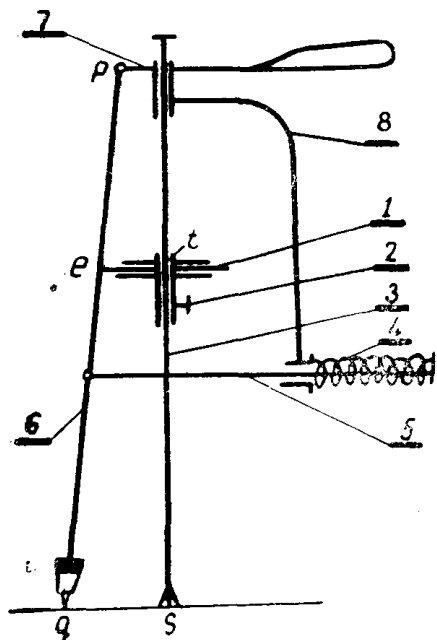
С целью вскрытия ошибок, относящихся к существующим эллиптическим циркулям и установления условий, соблюдение которых необходимо при их конструировании, написана данная работа.

Остановимся на трех существующих конструкциях.

Первая конструкция немецкого автора Роберта Кайлerta, известная из германского патента № 483720 по классу 42А, 12 от 7-го марта 1928 г.

Схема прибора дана на фиг. 1. Принцип действия прибора сводится к тому, что стержень 6, несущий пишущий элемент, обкатывается вокруг сменных эллиптических дисков-шаблонов 1. При этом стержень 6 постоянно прижимается к дискам-шаблонам 1 с помощью пружины 4 и, будучи шарнирно соединенный с рычагом 7, снабженным ручкой для вращения поворотной системы, поворачивается вокруг шарнирной точки p .

Нужное соотношение осей эллипса получается сменными дисками — шаблонами. Перемещением дисков вдоль неподвижной ножки 3 с последующим закреплением их на этой же ножке с помощью винта 2 автор предполагал получить изменение величины кривой. В действительности же прибор не может уве-



Фиг. 1

личивать или уменьшать кривую, воспроизведенную дисками — шаблонами не искажая ее, по следующей причине.

Условный центр вращения o стержня pq (таковой получится продолжением стержня pq до пересечения с неподвижной ножкой циркуля 3) во время работы непрерывно перемещается вдоль ножки ts (фиг. 2).

Если et соответствует малой оси заданного эллипса, то увеличение ее определится отношением $\frac{oq}{oe}$, так как $et \parallel qs$ и $\Delta oqs \sim \Delta oet$. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{qs}{et} = \frac{oq}{oe} = \frac{os}{ot}. \quad (1)$$

Пренебрегая небольшим вертикальным перемещением точки p и учитывая, что точка p находится на жестком рычаге 7, увеличение большей оси, если за нее принять величину e_1t , определится отношением $\frac{o_1q_1}{o_1e_1}$, так как

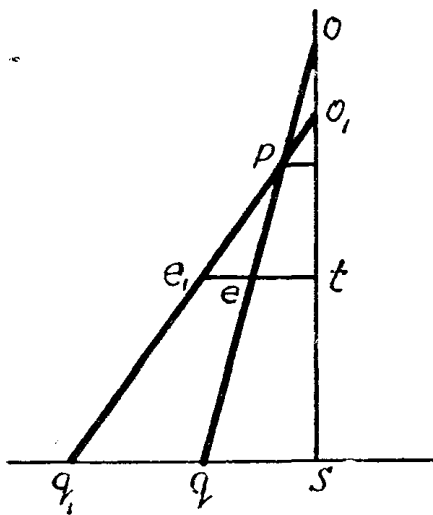
$$\frac{q_1s}{e_1t} = \frac{o_1q_1}{o_1e_1} = \frac{o_1s}{o_1t}. \quad (2)$$

Сопоставляя уравнения (1) и (2) получаем

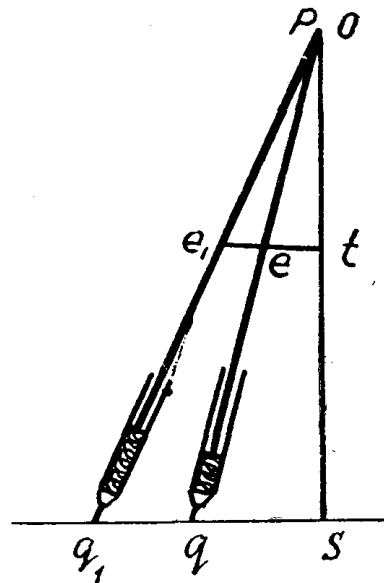
$$\frac{oq}{oe} \neq \frac{o_1q_1}{o_1e_1}.$$

Следовательно кривая получается с искажением.

Для компенсации указанного недостатка следовало бы точку p вращения стержня pq совместить с точкой o и закрепить ее так, чтобы она не перемещалась по вертикали, а стержень pq снабдить приспособлением, позволяющим изменять длину pq (фиг. 3).



Фиг. 2



Фиг. 3

Предположим, что et и e_1t соответственно равны малой и большой оси эллипса. Тогда увеличение малой оси определится отношением:

$$\frac{qs}{et} = \frac{oq}{oe} = \frac{os}{ot}, \quad (3)$$

а большой оси соответственно:

$$\frac{q_1s}{e_1t} = \frac{o_1q_1}{o_1e_1} = \frac{o_1s}{o_1t}. \quad (4)$$

Отсюда

$$\frac{qs}{et} = \frac{q_1s}{e_1t} \quad \text{или} \quad \frac{oq}{oe} = \frac{oq_1}{oe_1}.$$

Значит в этом случае искажения не получается.

Вторая конструкция советского автора Николаенко П. П. советский патент № 9695 по классу 42А, 12 от 29 марта 1928 г. (фиг. 4).

Принцип действия конструкции сводится к тому, что стержень 7, несущий пишущий элемент 11, вращаясь вокруг неподвижного эллиптического барабана 4, остается параллельным

неподвижной ножке 1. Достигается это наличием двух параллельных пружин 6, прикрепленных одним концом к стержню 7, а другим — к втулке 5, свободно сидящей на ножке 1. Пружины 6 непрерывно прижимают стержень 7 через винт 9 к эллиптическому барабану 4. Эллиптический барабан в нижнем сечении представляет окружность, а в верхнем — эллипс, причем большая ось эллипса на всем протяжении барабана представляет из себя величину постоянную и равную диаметру окружности нижнего сечения, а малая ось, начиная с нижнего сечения непрерывно уменьшается и имеет минимальное значение в верхнем основании барабана.

Прибор дает точную кривую эллипса только в том случае, если точка касания винта 9 барабана 4 (точка e) и пишущее острие (точка q) находятся на одной вертикали, то-есть если пишущее острие q будет чертить эллипс, воспроизведенный в сечении барабана на уровне точки e без изменения величины его.

Изменение же величины его, осуществляемое с помощью винта 9, приводит к искажению характера кривой, так как та величина, на которую производится изменение радиусов-векторов вычерчиваемого эллипса, в процессе вычерчивания его не изменяется.

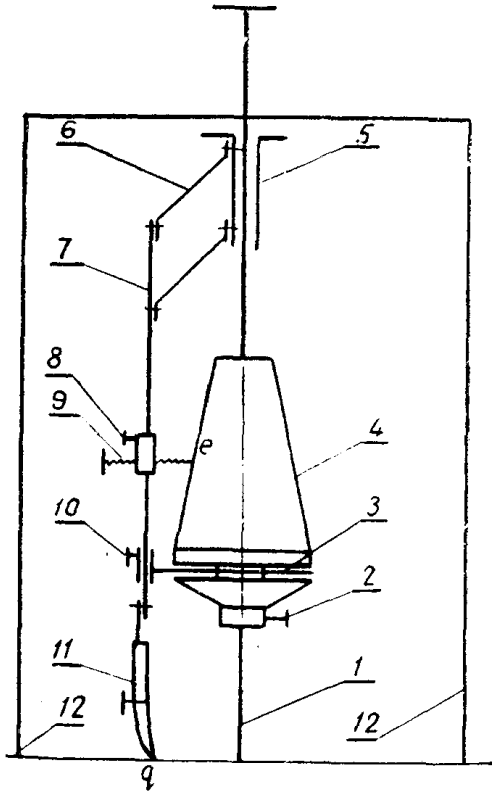
Кроме искажения кривой, прибор имеет второй недостаток, который заключается в том, что при изменении величины кривой получается изменение отношения осей ее, то есть $\frac{a}{b} \neq \frac{a+b_1}{b+b_1}$, где b_1 — постоянная

величина, на которую изменяются параметры a и b эллипса, воспроизведенного эллиптическим барабаном. С этой точки зрения применение прибора весьма ограничено.

Прибор Николаенко П. П. может быть применен только в тех случаях, где не требуется большой точности и где размер кривых не очень отличается от кривых, воспроизведенных эллиптическим барабаном.

Третья конструкция немецкого автора Корнелиуса Отто, известная из германского патента № 603712 по классу 42а, 12 от 8 июня 1933 г. (фиг. 5).

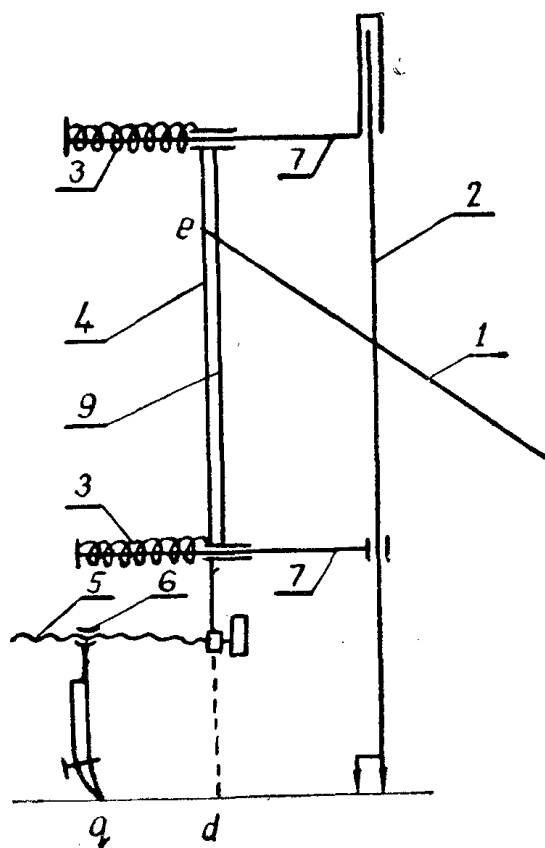
Принцип действия прибора сводится к тому, что кривая эллипса



Фиг. 4

воспроизводится проектированием поворотного наклонного круглого диска 1 на плоскость чертежа, а изменение величины ее производится винтом 5. Стержень 4 совершает параллельное движение, так как опирается на две втулки, свободно сидящие на двух параллельных направляющих 7, и при своем движении постоянно прижимается к периметру наклонного диска 1 с помощью пружин 3.

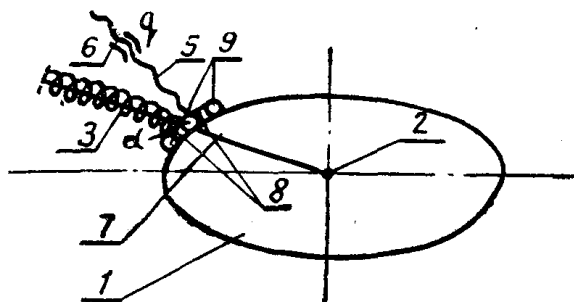
В отличие от прибора Николаенко П. П. здесь, при изменении величины эллипса, воспроизведенного наклонным круговым диском 1, постоянная величина b_1 откладывается не по радиусу-вектору, а по нормали к кривой (фиг. 6). Осуществляется это с помощью 2 дополнительных



Фиг. 5

стержней 9 (кроме главного 4), соединенных с главным—двумя плоскими пружинами 8. Стержни 9 также, как и главный стержень 4, постоянно прижимаются к периметру наклонного диска. Так как пружины 8 по размерам и форме одинаковы между собой, то они обеспечивают постоянное перпендикулярное положение оси винта к касательной, проведенной к периметру наклонного диска в точке касания его главным стержнем.

Рассмотрим вопрос о диапазоне применения этого прибора. Обозначим угол наклона наклонного диска к плоскости чертежа через



Фиг. 6

α (фиг. 7), полуоси эллипса, в который проектируется диск, через a (большую) и b (малую), тогда полуоси вычерчиваемой кривой будут соответственно равны: $(a + b_1)$ и $(b + b_1)$.

Предположим, что требуется увеличить эллипс, в который проектируется наклонный диск, с соотношением осей $\frac{2a}{2b} = 2$ в два раза, то есть так, чтобы были справедливы следующие отношения:

$$a + b_1 = 2a \quad (5)$$

и

$$\frac{a + b_1}{b + b_1} = 2. \quad (6)$$

Угол α потребуется изменить. С изменением угла α изменится и величина b . Найдем их новые значения.

Из уравнения 5 находим, что $b_1 = a$.

Величину b_1 мы получаем с помощью винта 5. Но так как винт 5 — жесткий, то такая же величина $b_1 = a$ будет отложена и по малой оси вычерчиваемого эллипса.

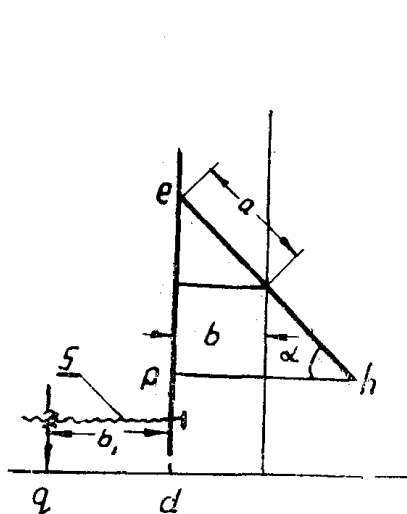
Подставляя значение $b_1 = a$ в уравнение (6) получим: $b = 0$.

Чтобы получить такое значение b необходимо диск 1 поставить в вертикальное положение, что практически получить невозможно.

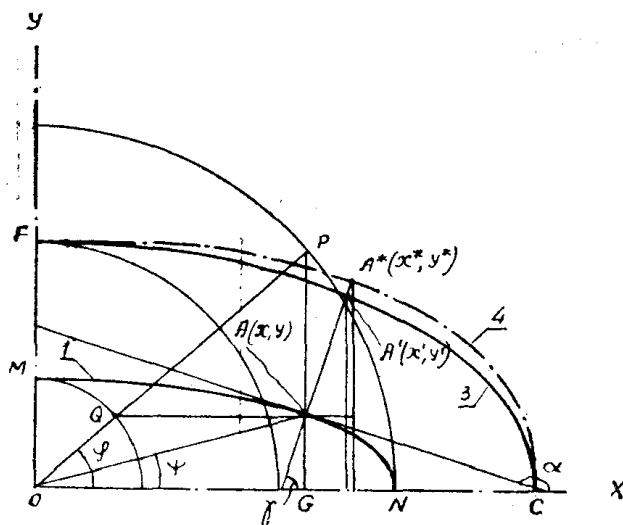
Следовательно, диапазон применения этого прибора, также, как и прибора Николаенко П. П. весьма ограничен.

Проанализируем характер кривой, которую дает прибор. Для этого введем следующие обозначения (фиг. 8)

$$ON = a; \quad OM = b; \quad NC = MF = b_1.$$



Фиг. 7



Фиг. 8

Примем кривую 1 за эллипс, в который проектируется наклонный диск.

Кривая 3 представляет собой также эллипс, имеющий полуоси: $(a + b_1)$ и $(b + b_1)$.

Кривая 4 — параллельная, или эквидистантная [1] эллипсу 1, то есть кривая, полученная с помощью прибора.

Уравнение эллипса 1 для произвольной точки A в параметрической форме запишется так:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \varphi \\ y &= b \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Соотношение между углами ψ и φ определится следующим образом:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{AG}{OG} = \frac{y}{x}.$$

Подставляя в это уравнение значения x и y из уравнения (7), получим:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi. \quad (8)$$

Через точку A эллипса 1 проводим нормаль к эллипсу. Если на этой нормали от точки A отложить расстояние b_1 , то получим точку $A^*(x^*, y^*)$ на параллельной кривой 4. Эта же нормаль пересекает и кривую 3, то есть

эллипс, построенный в тех же осях, что и параллельная кривая и дает точку $A'(x', y')$.

Для выражения угла наклона нормали к оси ox (угла γ) через угол ψ напишем уравнение нормали:

$$a^2 y (x' - x) = b^2 x (y' - y).$$

Преобразуем это уравнение:

$$1 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y' - y}{x' - x}. \quad (9)$$

Но

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\operatorname{tg} \psi}, \quad \text{а} \quad \frac{y' - y}{x' - x} = \operatorname{tg} \gamma \quad (\text{фиг. 8}).$$

Подставляя эти значения в уравнение (9), получим:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} \psi. \quad (10)$$

Теперь напишем уравнение параллельной кривой:

$$\begin{aligned} x^* &= x + b_1 \cos \gamma, \\ y^* &= y + b_1 \sin \gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

Чтобы определить ошибку прибора нужно определить расстояние $A'A^*$.

Уравнение нормали приведем к такому виду:

$$y' - y = \operatorname{tg} \gamma (x' - x). \quad (12)$$

Тогда уравнение эллипса 3 будет иметь вид:

$$\frac{(x')^2}{(a + b_1)^2} + \frac{(y')^2}{(b + b_1)^2} = 1. \quad (13)$$

Решаем совместно эти два уравнения (12 и 13) и находим значение x'

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\operatorname{tg} \gamma (x \operatorname{tg} \gamma - y) (a + b_1)^2}{(b + b_1)^2 + (a + b_1)^2 \operatorname{tg}^2 \gamma} \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \gamma (x \operatorname{tg} \gamma - y)^2 (a + b_1)^4 + (a + b_1)^2 [(b + b_1)^2 + (a + b_1)^2 \operatorname{tg}^2 \gamma] [(b + b_1)^2 - (x \operatorname{tg} \gamma - y)^2]}{(b + b_1)^2 + (a + b_1)^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}} \end{aligned} \quad (14)$$

Из уравнения (12) находим значение y' :

$$y' = y + \operatorname{tg} \gamma (x' - x). \quad (15)$$

Подсчитаем ошибку прибора на конкретном примере:

$$a = 274 \text{ мм}, \quad b = 98 \text{ мм}, \quad b_1 = 57 \text{ мм}, \quad \psi = 15^\circ.$$

Из (8) при указанных выше значениях a , b , b_1 и ψ находим: $\varphi = 37^\circ$.
Определим координаты точки A кривой 1 по формуле (7):

$$\begin{aligned} x &= 274 \cdot \cos 37^\circ = 218 \text{ мм}, \\ y &= 98 \cdot \sin 37^\circ = 58,8 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Из формулы (10) находим $\gamma = 64^\circ 30'$

Подставим значение угла γ в формулу (11) и найдем координаты точки A^* параллельной кривой:

$$x^* = 242,5 \text{ мм},$$

$$y^* = 110,3 \text{ мм}.$$

Координаты точки A' , подсчитанные по формулам (14) и (15) получаются:

$$x_1' = 240,3 \text{ мм}, \quad y_1' = 105,7 \text{ мм}.$$

Подсчитаем ошибку прибора по нормали (отрезок $A^* A'$)

$$(A^* A')^2 = (x^* - x_1')^2 + (y^* - y_1')^2.$$

Отсюда

$$A^* A' = 5,1 \text{ мм}.$$

Рассмотрим 2-й пример: $a = 150 \text{ мм}$, $b = 50 \text{ мм}$, $b_1 = 100 \text{ мм}$, $\psi = 10^\circ$.

Из (8) находим: $\varphi = 28^\circ$.

Определим координаты точки $A(x, y)$

$$x = 132,2 \text{ мм}, \quad y = 23,4 \text{ мм}.$$

Из (10) находим значение угла γ :

$$\gamma = 57^\circ 45'.$$

По углу γ определим координаты точки A^* , параллельной кривой 4

$$x = x + b_1 \cos \gamma = 185,5 \text{ мм}, \quad y^* = y + b_1 \sin \gamma = 107,8 \text{ мм}.$$

Найдем координаты точки A' кривой 3 по (14) и (15):

$$x_1' = 181,8 \text{ мм},$$

$$y_1' = y + \operatorname{tg} \gamma (x_1' - x) = 102,1 \text{ мм}.$$

Ошибка прибора составит

$$A^* A' = \sqrt{(x^* - x_1')^2 + (y^* - y_1')^2} = 6,8 \text{ мм}.$$

Как показывают примеры, и этот прибор, как и оба предыдущих, дает неизбежную ошибку в начертании кривой эллипса, причем, с увеличением величины b_1 ошибка увеличивается.

Выводы

1. Большинство существующих конструкций дают весьма ограниченный диапазон увеличения или уменьшения эллипсов.

2. Большинство существующих приборов конструктивно оформлены таким образом, что для изменения величины вычерчиваемых эллипсов одного и того же отношения осей, требуется двойная регулировка. Это создает неудобство, например, при выполнении аксонометрических проекций.

3. Все приборы дают заведомо искаженные кривые.

Естественно, что такие приборы не отвечают тем требованиям, которые к ним предъявляются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Житомирский О. К. и др. Задачи по высшей геометрии, ОНТИ, НКТП СССР. Москва—Ленинград, 1937.
 2. Брадис В. Аналитическая геометрия. Учпедгиз. Москва, 1937.
 3. Мейер Цур Каппелен В. Математические инструменты. Москва. Издательство иностранной литературы, 1950.
 4. Robert Kahlert in Lauf b. Nürnberg Zirkel zum Zeichnen von Ellipsen und ähnlichen Kurven. Patentierte im Deutschen Reiche № 483720 vom 7 März 1928 ab.
 5. Николаенко П. П. Эллипсограф. Советский патент № 9695 по классу 42а, 12 от 29 марта 1928.
 6. Cornelius Ott in Stuttgart-Hofen Gerät zum Zeichnen von Ellipsen; Patentierte im Deutschen Reiche № 603712 vom 8 Juni 1933 ab.
-